

## Još jedan primjer izvedbe hrpe

- Za poboljšanje brzine obavljanja zadanih operacija stvoren je algoritam koji kreće od krajnjih čvorova prema korijenu, razinu po razinu. Samo podatak u korijenu može narušavati svojstvo hrpe, dok podstabla zadržavaju to svojstvo. Tada je samo potrebno tu nepravilnost ispraviti i opet dobivamo željenu hrpu. To čini funkcija `podesi` u slijedećem primjeru. Za krajnje čvorove svojstvo hrpe je zadovoljeno, pa treba u `stvari_hrpu` funkciji provesti popravljnje svojstva hrpe samo za korijen stabla (identični postupak prvom primjeru za hrpu)
- Funkcija `podesi()`: potpuna binarna stabla s korijenima  $A[2*i]$  i  $A[2*i+1]$  kombiniraju se s  $A[i]$  formirajući jedinstvenu hrpu

```

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#define MAXGOM 100
typedef int tip;
// potpuna binarna stabla s korijenima A[2*i] i A[2*i+1] kombiniraju se s
// A[i] formirajući jedinstvenu hrpu, 1 <= i <= n
void podesi (tip A[], int i, int n) {
    int j;
    tip stavka;
    j = 2*i;
    stavka = A[i];
    while (j <= n ) { // Usporedi lijevo i desno dijete (ako ga ima)
        if ((j < n) && (A[j] < A[j+1])) j++; // j pokazuje na veće dijete
        if (stavka >= A[j]) break; // stavka je na dobrom mjestu
        A[j/2] = A[j]; // veće dijete podigni za razinu
        j *=2; }
    A[j/2] = stavka;
}

// premjesti elemente A[1:n] da tvore gomilu
void StvoriHrpu (tip A[], int n) {
    int i;
    for (i = n/2; i >= 1; i--)
        podesi (A, i, n);
}

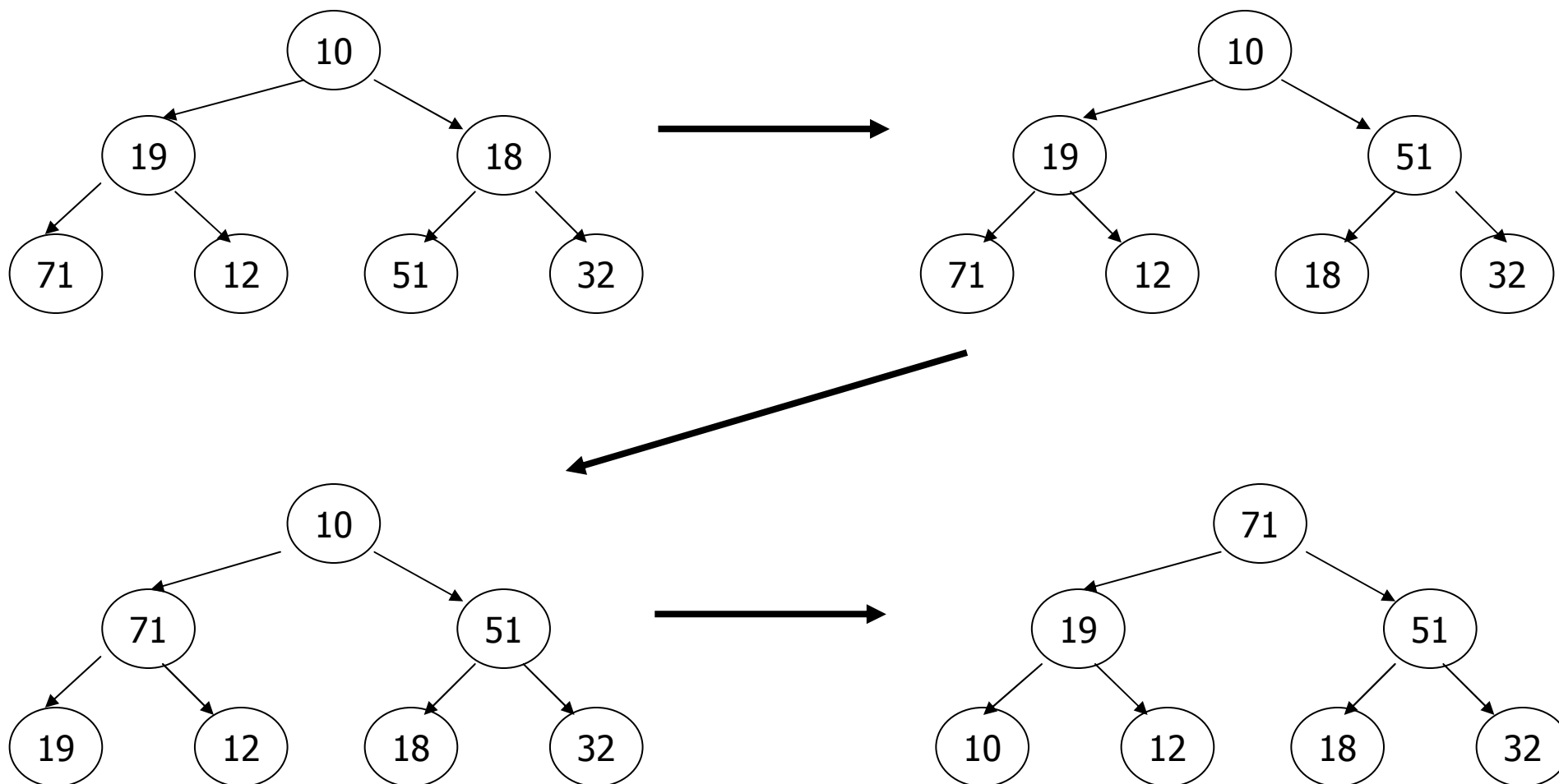
```

```

void main(void) {
    FILE *fi;
    int i, j, k, n;
    tip A[MAXGOM];
    fi = fopen ("UlazZaHrpu.txt", "r");
    if (fi) {
        j = 1;
        while (j < MAXGOM && fscanf (fi, "%d", &A[j]) != EOF) {
            printf ("%d. ulazni podatak je %d \n", j, A[j]);
            j++; }
        fclose (fi);
        // podesi broj elemenata i stvori hrpu
        n = j - 1;
        StvoriHrpu (A, n);
        // pisi hrpu po retcima
        i = 1; k = 1;
        while (i < j) { // petlja do zadnjeg u hrpi
            // pisi do maksimalnog u hrpi razine k
            for (; i <= pow (2, k) - 1 && i < j; i++) {
                printf(" %d ", A[i]);
            }k++; // povecaj razinu
            printf ("\n"); }
    } else {
        printf ("Nema ulazne datoteke\n"); }
    system("PAUSE"); exit(0); }

```

- Stvaranje hrpe za ulazni niz podataka: 10,19,18,71,12,51,32



- Za  $n$  podataka,  $2^{k-1} \leq n < 2^k$ , broj razina je  $k = \lceil \log_2(n+1) \rceil$ . Za najgori slučaj broj iteracija u `podesi` iznosi  $k-i$  za čvor na razini  $i$  gdje ima najviše  $2^{i-1}$  čvorova. Slijedi da je, vrijeme izvođenja za `StvoriHrpu`:

$$\sum_{i=1}^k 2^{i-1} (k-i)$$

. Uočimo da se eksponent mijenja od 0 do  $k-1$ , a faktor od  $k-1$  do 0.

Slijedi ekvivalentni izraz kad se izbacni faktor 0 i obrne redosljed sumacije:

$$= \sum_{i=1}^{k-1} i 2^{k-i-1} = \sum_{i=1}^{k-1} 2^{k-1-i} i$$

S obzirom da je  $2^{k-1} \leq n$ ,

$$\leq n \sum_{i=1}^{k-1} i/2^i \leq 2n = O(n), \text{ jer suma reda teži prema 2.}$$

- Vrijeme izvođenja za najgori slučaj algoritma `StvoriHrpu` je  $O(n)$ , što je za red veličine bolje od  $O(n \log_2 n)$  za uzastopno korištenje `ubaci` funkcije.
- Funkcija `StvoriHrpu` traži da su svi elementi za stvaranje hrpe već prisutni, dok `ubaci` može ubaciti novi element u hrpu bilo kada. Funkcije koje hrpa treba brzo obaviti i radi kojih je napravljena ta struktura podataka su ubacivanje novih i brisanje najvećeg elementa iz skupa podataka. Brisanje najvećeg podatka se obavlja izbacivanjem korijena i pozivanjem funkcije `podesi`, a ubacivanje novih se radi funkcijom `ubaci`. Tako se postiže da se obje željene funkcije obavljaju u  $O(\log_2 n)$  vremenu.

## Prioritetni red i hrpa

- Napisati program za ubacivanje i skidanje elemenata (prioritet određuje cijeli broj) iz prioritetnog reda. Za prioritet elementa i odabir operacije (ubacivanje ili skidanje) koristi se generator slučajnih brojeva. Ako generator načini parni broj, element najvećeg prioriteta vadi se iz prioritetnog reda. Ako generator načini neparni broj, stvara se novi element sa slučajno generiranim prioritetom i stavlja u prioritetni red.

```

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>
#include <math.h>
#include <ctype.h>
#define MAXPRIOR 100
typedef int tip;

void podesi (tip A[], int i, int n) {
    // potpuna binarna stabla s korijenima A[2*i] i A[2*i+1]
    // kombiniraju se s A[i] stvarajuci jedinstvenu hrpu, 1 <= i <= n
    int j;
    tip stavka;
    j = 2 * i;
    stavka = A[i];
    while (j <= n) {
        // Usporedi lijevo i desno dijete (ako ga ima)
        if ((j < n) && (A[j] < A[j + 1])) j++;
        // j pokazuje na vece dijete
        if (stavka >= A[j]) break; // stavka je na dobrom mjestu
        A[j / 2] = A[j]; // vece dijete podigni za razinu
        j *= 2;
    }
    A[j / 2] = stavka;
}

```

```

void ubaci (tip A[], int k) { // ubacuje vrijednost iz A[k] na hrpu pohranjenu u A[1 : k - 1]
    int i, j;
    tip novi;
    j = k;
    i = k / 2;
    novi = A[k];
    while ((i > 0) && (A[i] < novi)) {
        A[j] = A[i]; // smanji razinu za roditelja
        j = i;
        i /= 2;      // roditelj od A[i] je na A[i/2]
    }
    A[j] = novi;
}

```

```

tip skini (tip A[], int *k) {
    // izbacuje vrijednost iz A[k] sa prvog mjesta, ako je red prazan vraca -1
    tip retVal = -1;
    if (*k <= 1) return retVal;
    retVal = A[1];
    (*k) --;
    A[1] = A[*k];
    podesi (A, 1, *k);
    return retVal;
}

```



```

int main() {
    int prior, i, j, k = 1;
    tip A[MAXPRIOR];
    srand((unsigned) time(NULL));
    printf("Za obavljanje jednog koraka pritisni ENTER, za kraj bilo koji znak\n");
    while(isspace(getchar())) {
        if (rand() % 2) {
            if (k >= MAXPRIOR)
                printf("Prioritetni red je pun!\n");
            else {
                printf("Dodavanje u prioritetni red: %d\n", prior=(int)(rand()/(RAND_MAX + 1.) * 99 + 1));
                A[k] = prior;
                ubaci(A, k);
                k++; }
        } else {
            if ((prior = skini(A, &k)) == -1)
                printf("Prioritetni red je prazan!\n");
            else
                printf("Skidanje iz prioritetnog reda: %d\n", prior); }
        for (i = 1, j = 1; i < k; j++) {
            for (; i <= pow (2, j) - 1 && i < k; i++) {
                printf(" %d ", A[i]); }
            printf ("\n"); } }
    system("PAUSE");
}

```

# Računanje sume članova polja

- Zadatak: napisati funkciju koja računa sumu članova polja.
- Najjednostavnije rješenje:

```
int suma1 (int polje[], int n) {                               složenost O(n)
    int i, suma = 0;
    for (i = 0; i < n; i++) {
        suma += polje[i]; }
    return suma;
}
```

- Rekurzivni postupak: sumiranje prvog člana s ostatkom polja:

```
int suma2 (int polje[], int n) {                               složenost O(n), prosječno asimptotsko
    if (n <= 0) return 0;                                       vrijeme izvođenja je 2n
    return polje[n - 1] + suma2(polje, n - 1);
}
```

- Podijeli-pa-vladaj algoritam: polje se dijeli u polovice koje se sumiraju

```
int suma3 (int polje[], int l, int d) { // l (d) – indeks lijevog (desnog) ruba polja
    int p;
    if (d < l) return 0;
    if (d == l) return polje[d];
    p = (d + l) / 2;
    return suma3 (polje, l, p) + suma3 (polje, p + 1, d);
}
```

- Složenost ovog algoritma je također  $O(n)$

- Glavna procedura:

```
void main() {
    int N,i,*a,s1,s2,s3;

    printf("Unesi duljinu polja:\n");
    scanf("%d",&N);
    if ((a = (int *)malloc(N*sizeof(int))) == NULL)
        {printf("Greska u rezerviranju memorije !");
        exit(1); }
```

```
srand(time(NULL));  
printf(" Elementi polja su:\n");  
for(i=0; i < N; i++) {  
    a[i]= 100 * ((float) rand()/(RAND_MAX + 1));  
    printf("%d ",a[i]); }  
printf("\n\n");
```

```
s1 = suma1(a,N);  
printf(" Rezultat funkcije suma1:%d\n",s1);  
s2 = suma2(a,N);  
printf(" Rezultat funkcije suma2:%d\n",s2);  
s3 = suma3(a,0,N-1);  
printf(" Rezultat funkcije suma3:%d\n",s3);  
system("PAUSE");
```

```
}
```

## Računanje binomnih koeficijenata – vrijeme izvršavanja

- Po definiciji binomni koeficijenti su:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

- Rekurzija za računanje binomnih koeficijenata:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Ovakva rekurzija mnogo puta računa iste vrijednosti, pa je neefikasna

- Preurediti račun tako da se jednom izračunata vrijednost pospremi i sačuva za daljnja računanja – računanje Pascalovog trokuta
- Algoritam:
  - u prvom redu se upiše samo broj 1
  - za računanje elemenata u sljedećim redovima se uzimaju brojevi iz prethodnog reda koji su lijevo i desno od novog broja, ako broj lijevo ili desno ne postoji uzima se 0

				1						
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1

```

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>
#include <sys\timeb.h>
#define MAXRED 100

// vraca niz znakova c u zadanoj duljini n
char* nc (int c, int n) {
    static char s[80+1];
    s[n] = '\0'; // prirubi
    while (--n >= 0) s[n] = c; // popuni
    return s;}

// vraca faktorijela (n), broj iteracija, zastavicu pogreske, radi do n=20
long long FAKT (int n, long *freq, int *errorflag) {
    int i;
    long long p;
    p = 1;
    for (i = 2; i <= n; i++) {
        p *= i;
        if (p <= 0) *errorflag = 1;
    }
    *freq += 1; }
return p;}

```

```
// binomni koeficijenti s pomocu faktorijela
long BINOM (int n, int m, long *freq, int *errorflag) {
    long long p;
    *freq += 1;
    p = FAKT (n, freq, errorflag);
    p /= FAKT (m, freq, errorflag);
    p /= FAKT (n - m, freq, errorflag);
    return (long) p;
}
```

```
// binomni koeficijenti rekurzivno
long BINOMR (int n, int m, long *freq) {
    *freq += 1;
    if ((m == 0) || (m == n)) return 1;
    return BINOMR (n-1, m, freq) + BINOMR (n - 1, m - 1, freq);
}
```



```

// Pascalov trokut
void Blaise (int n) {
    int i, j;
    long stari[MAXRED], novi[MAXRED];

    if (n >= MAXRED) return;
    printf("\nIzracunavanje Pascalovog trokuta\n");
    novi[0] = 1;
    for (i = 0; i < n; i++) {
        novi[i+1] = 1;
        for (j = 1; j <= i; j++)
            novi[j] = stari[j-1] + stari[j];
        printf("%s", nc(' ', 2*(n-i)));
        for (j = 0; j <= i+1; j++) {
            printf ("%3d ", novi[j]);
            if (novi[j] < 0) {
                printf ("\n za i=%d i j=%d broj postane prevelik\n", i, j);
                exit (1); }
            stari[j] = novi[j]; }
        printf ("\n");
    }
}

```

```

void main (void) {
    int n, m, i, j;
    int broj;
    long k;
    int errorflag;
    float f[2][2];      // trajanje i broj iteracija
    long trajanje, freq;
    struct timeb vrijeme1, vrijeme2;

    while (1) {          // citanje parametara
        printf ("Upisite broj obavljanja programa >");
        scanf ("%d",&broj); // npr: 1, 10000
        if (broj <= 0) {
            printf("Gotovo!\n");
            break;  }
        do {
            printf ("Upisite n, m >");
            scanf ("%d %d", &n, &m);
        } while ((n < m) || (n < 0) || (m < 0) ||
                ((m == 0) && (n == 0)));

        // inicijalizacija
        for (i = 0; i < 2; i++)
            for (j = 0; j < 2; j++)
                f[i][j] = 0;
    }
}

```

```

printf ("Program ce se ponoviti %d puta\n", broj);
    errorflag = 0;
    // koristenjem faktorijela
    freq = 0;
ftime (&vrijeme1);
for (i = 1; i <= broj; i++)
    k = BINOM (n, m, &freq, &errorflag);
ftime (&vrijeme2);
trajanje=1000*(vrijeme2.time - vrijeme1.time) + vrijeme2.millitm - vrijeme1.millitm;
f[0][0] += trajanje;
f[1][0] += freq;
printf (" BINOM : %d povrh %d = %ld %s\n",n, m, k, errorflag ? "(pogresno)" : "");
    // rekurzivno
    freq = 0;
ftime (&vrijeme1);
for (i = 1; i <= broj; i++)
    k = BINOMR (n,m,&freq);
ftime (&vrijeme2);
trajanje=1000*(vrijeme2.time - vrijeme1.time) + vrijeme2.millitm- vrijeme1.millitm;
f[0][1] += trajanje;
f[1][1] += freq;
printf ( " BINOMR: %d povrh %d = %ld\n", n, m, k);

```

```

// racun prosjecnih vremena i ispis rezultata
for (i = 0; i < 2; i++) {
    f[0][i] = f[0][i] / (float) broj;
    f[1][i] = f[1][i] / (float) broj;
}
printf ("\nProsjecno vrijeme za %d izvodenja:\n BINOM: %f\nBINOMR: %f\n",
        broj, f[0][0], f[0][1]);
printf ("\nBroj iteracija:\n BINOM: %ld BINOMR: %ld\n",
        (long) f[1][0], (long) f[1][1]);
}

// Pascalov trokut
while (1) {
    printf ("Unesite broj redaka Pascalovog trokuta >");
    scanf ("%d", &n); // npr: 10
    if (n <= 0 || n >= MAXRED) break;
    Blaise (n);
}
system("PAUSE");
exit (0);
}

```

## Analiza algoritma – a priori i a posteriori

- Zadatak: izračunati mod sortiranog cjelobrojnog polja, tj. odrediti član polja koji se najčešće pojavljuje i prebrojati njegovu učestalost.
  - `mode0` izravno rješavanje
  - `rmode0` rekurzivni postupak
    - Zamislimo da je u polju od  $n$  članova  $a[0:n-1]$  izračunat mod i učestalost  $f$  za prvih  $n-1$  članova polja. Pod kojim uvjetima zadnji član polja može promijeniti mod? Ako je  $a[n-1] \neq a[n-2]$  niti mod niti učestalost se ne mijenjaju. Ako jest jednak, kako razlikovati između 3 moguća slučaja:
      - a) nađen je novi mod
      - b) mod je isti, ali se povećava učestalost  $f$
      - c) nema promjene ni moda niti učestalosti
    - Odgovor ovisi o tome da li je  $a[n-1] == a[n-1-f]$ . Ako jest, onda ima  $n-1 - (n-1-f) + 1 = f + 1$  pojavljivanja vrijednosti koje je u  $a[n-1]$ . To znači da je ta vrijednost sigurno ili novi mod ili stari mod s uvećanom učestalošću  $f$ .
  - `rmode1` rekurzivni postupak transformiran u iterativni
  - sva tri postupka imaju vrijeme izvođenja  $\Theta(n)$ . Koji je najbolji?

```

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>
#include <sys\timeb.h>
#define MAXA 1000

// izravno pronalazi mod i ucestalost u a[n]
int mode0 (int a[], int n, int *f) {
    int mode, i, temp; // mod, trenutni, privremeni

    mode = a[0]; *f = 1; temp = 1;
    for (i = 1; i < n; i++) {
        if (a[i] != a[i - 1]) {
            temp = 1;
        } else {
            temp++;
            if (temp > *f) {
                *f = temp; mode = a[i];
            }
        }
    }
    return mode; // vrati mod, frekvencija se vraca kroz *f
}

```

```

// rekurzivno pronalazi mod i ucestalost u a[0:i]
int rmode0 (int a[], int i, int *f) {
    int mode;
    if (i == 0) {                // osnovni slucaj
        mode = a[0]; *f = 1;
    } else {
        mode = rmode0 (a, i - 1, f);    // rekurzivni mod svih prethodnika
        if (a[i] == a[i - *f]) {        // novi mod ili stari mod s uvecanom ucestaloscju
            mode = a[i]; (*f)++;    }
    }
    return mode;    // vrati mod
}

```

```

// rekurzivni postupak transformiran u iterativni
int rmode1(int a[], int n, int *f) {
    int mode, i;
    mode = a[0]; *f = 1;
    for (i = 1; i < n; i++) {    // povratak iz rekurzije udesno
        if (a[i] == a[i - *f]) {
            mode = a[i]; (*f)++;    }
    }
    return mode; }

```

```

// U sortiranom polju a pronalazi se mod i ucestalost.
void main (void) {
    int a[MAXA], n, m; // polje, broj clanova, najveci clan
    int i, j, pom; // indeksi petlji, pomocna za sort
    int broj, freq, p; // broj ponavljanja, ucestalost, nadjeni mod
    struct timeb vrijeme1, vrijeme2; // poc. i zav. vrijeme
    long trajanje [3]; // vremena izvodjenja u ms

    do {
        printf ("Upisite broj clanova polja i maks. clan >");
        scanf ("%d %d", &n, &m);
    } while (n > MAXA);
    printf ("Upisite broj obavljanja programa >");
    scanf ("%d",&broj);
    printf("Izracuni ce se ponoviti %d puta\n", broj);
    srand ((unsigned) time (NULL));
    for (i = 0; i < n; i++) {
        a[i] = rand () % (m+1); }
    // sortiranje polja
    for (i = 0; i < n - 1; i++) {
        for (j = i; j < n; j++) {
            if (a[i] > a[j]) {
                pom = a[i]; a[i] = a[j]; a[j] = pom; } } }
}

```



```

for (i = 0; i < n; i++) printf ("%4d", a[i]);
    // izravno
ftime (&vrijeme1);
for (i = 1; i <= broj; i++)    p = mode0 (a, n, &freq);
ftime (&vrijeme2);
trajanje[0]=1000*(vrijeme2.time - vrijeme1.time) +vrijeme2.millitm - vrijeme1.millitm;
printf("\n mode0: Mod = %d, ucestalost = %3d\n",p,freq);
    // rekurzivno
ftime (&vrijeme1);
for (i = 1; i <= broj; i++)    p = rmode0 (a, n-1, &freq);
ftime (&vrijeme2);
trajanje[1]=1000*(vrijeme2.time - vrijeme1.time) + vrijeme2.millitm - vrijeme1.millitm;
printf("\n rmode0: Mod = %d, ucestalost = %3d\n",p,freq);
    // iterativna transformacija rekurzivnog
ftime (&vrijeme1);
for (i = 1; i <= broj; i++)    p = rmode1 (a, n, &freq);
ftime (&vrijeme2);
trajanje[2]=1000*(vrijeme2.time - vrijeme1.time) +vrijeme2.millitm - vrijeme1.millitm;
printf ("\n rmode1: Mod = %d, ucestalost = %3d\n", p, freq);
printf ("\nBroj milisekundi za %d izvodjenja:\n mode0: %d\nrmode0: %d\nrmode1:
    %d\n",broj, trajanje [0], trajanje [1], trajanje [2]);
system("PAUSE");
exit (0);
}

```