Rekurzija

Osnovna ideja

- Rekurzije u matematici – primjer su nizovi brojeva
- Zadana eksplicitna formula za izračunavanje općeg člana niza

  $a_n = 2^n$; $a_n = (3^n – 1) / 2$
- Rekurzivno zadavanje: vrijednost n-tog dana preko prethodnih članova niza

  $a_k = 2 * a_{k-1}$, $k \geq 2$, $a_1 = 2$; $a_k = 3 * a_{k-1} +1$, $k \geq 2$, $a_1 = 1$
- Aritmetički niz: a,d realni brojevi, d nije 0, $a_1 = a$, $a_n = a_{n-1} + d$
- Geometrijski niz: a,q realni brojevi, q nije 0 i 1, $a_1 = a$, $a_n = q * a_{n-1}$
- Računanje elemenata niza: uporaba vrijednosti prethodnih elemenata
- Problem traženja rješenja rekurzivne jednadžbe – eksplicitni izraz iz rekurzivnog
- Rekurzija se često koristi u računarstvu
- Procedura poziva samu sebe
- Mora postojati završetak
- Neki jezici (npr. stare verzije jezika *FORTRAN*) ne podržavaju rekurziju.
- Rekurzivni programi su kraći, ali izvođenje programa je najčešće dulje.
- Koristi se struktura podataka *stog* za pohranjivanje rezultata i povratak iz rekurzije.

- Primjer: funkcija koja računa sumu prvih n prirodnih brojeva:

```
int ZbrojPrvih(int n){
    if (n == 1) return 1;
    return ZbrojPrvih(n - 1) + n;
}
```

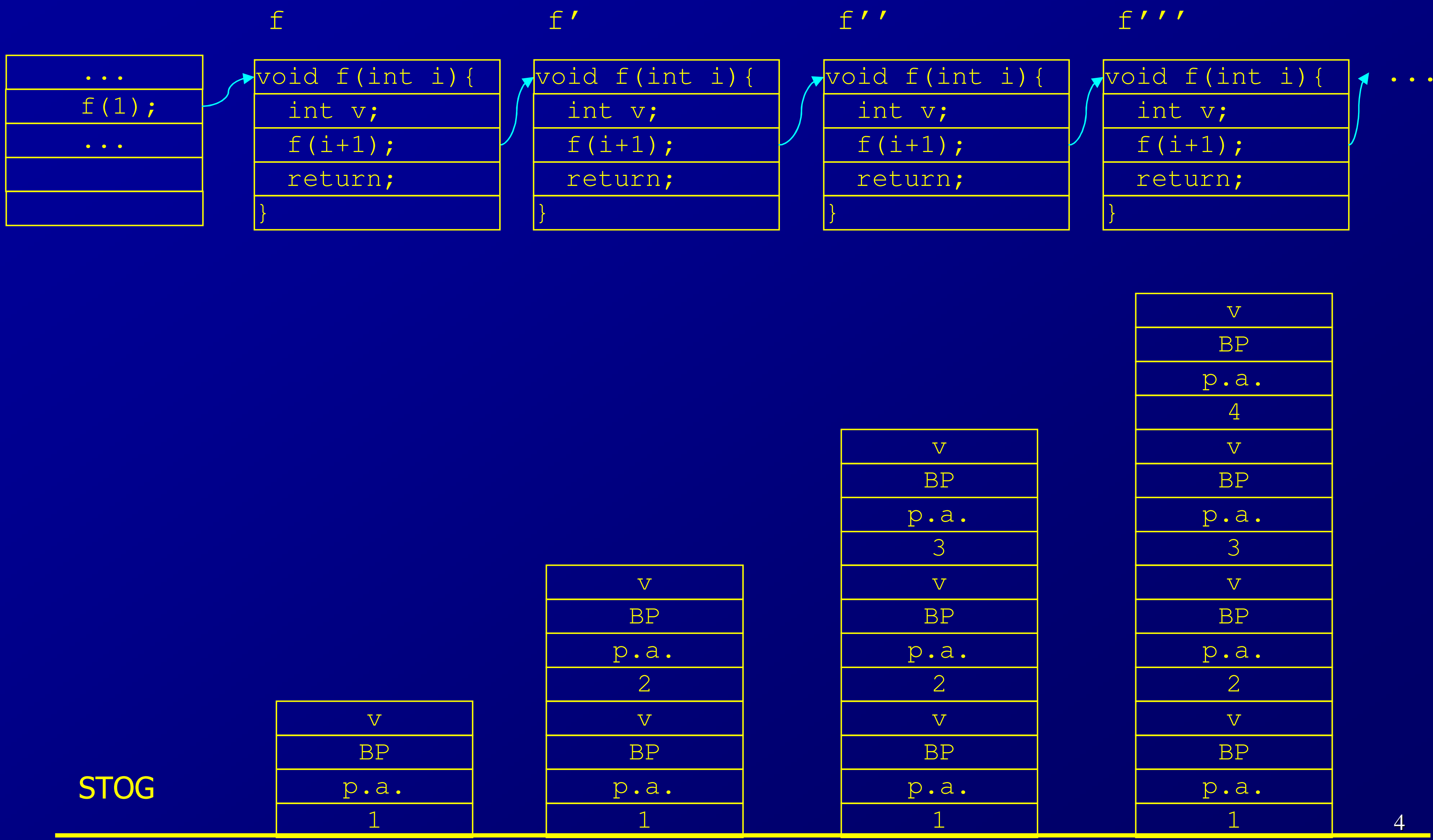
- Za n = 5, suma je 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15

- Drugi primjer: funkcija rezervira mjesto za polje cijelih brojeva i poziva samu sebe

```
void f (int i) {
  int v[10000];
  printf("%d ",i);
  f (i+1);
  return;
 }
```

- Izvršava se dok ne popuni dopušteni memorijski prostor za stog

Elementarna rekurzija i stog



Izračunavanje faktorijela

- Jedan od jednostavnih rekurzivnih algoritama jest izračunavanje $n!$ za $n >= 0$.

$0! = 1$

$1! = 1$

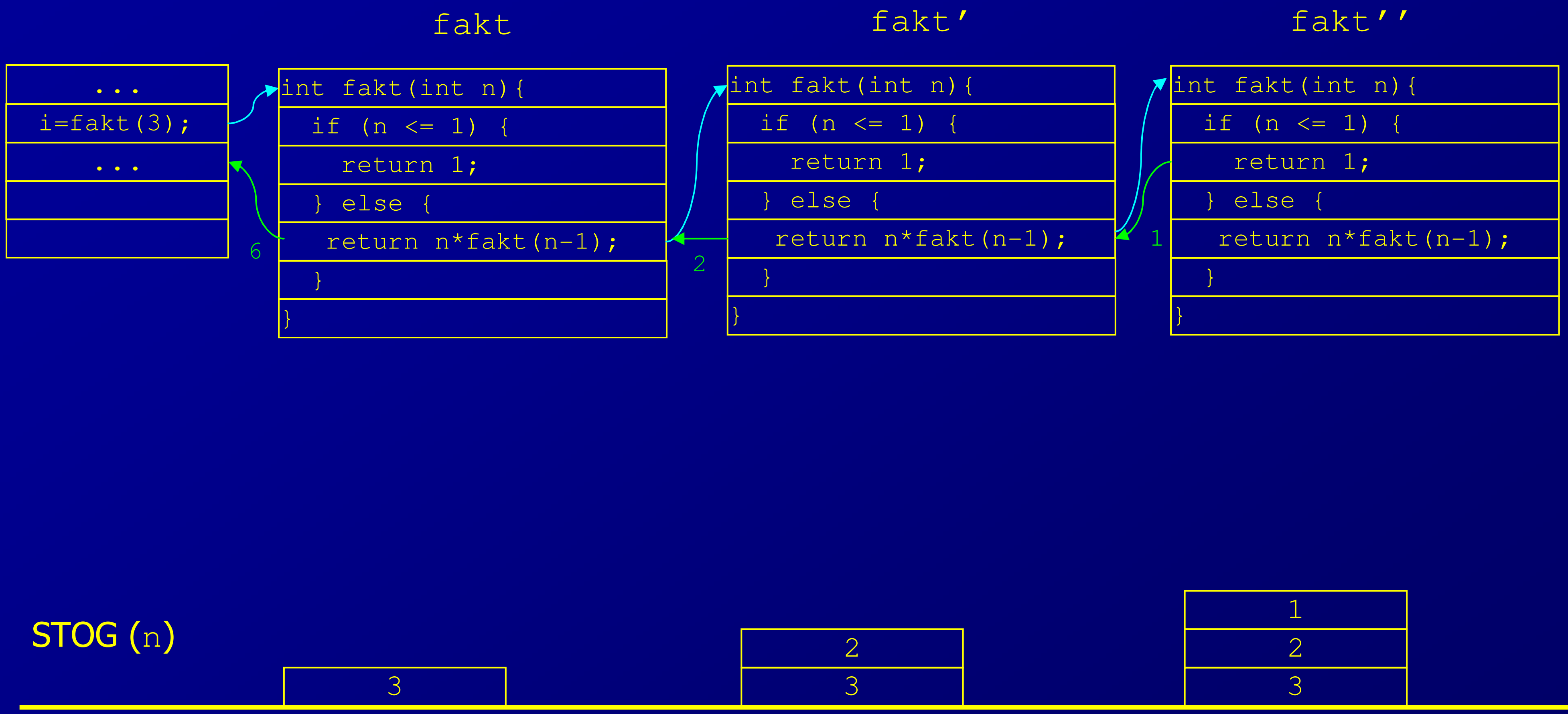
$n! = n * (n-1)!$

```
int fakt(int n){
   if (n <= 1) {
    return 1;
   } else {
    return n * fakt(n-1);
   }
}
```

Primjer: 4!

```
k = fakt (4);
    = 4 * fakt (3);
            = 3 * fakt (2);
                   = 2 * fakt (1);
                            = 1
```

Izračunavanje faktorijela



Fibonaccijevi brojevi

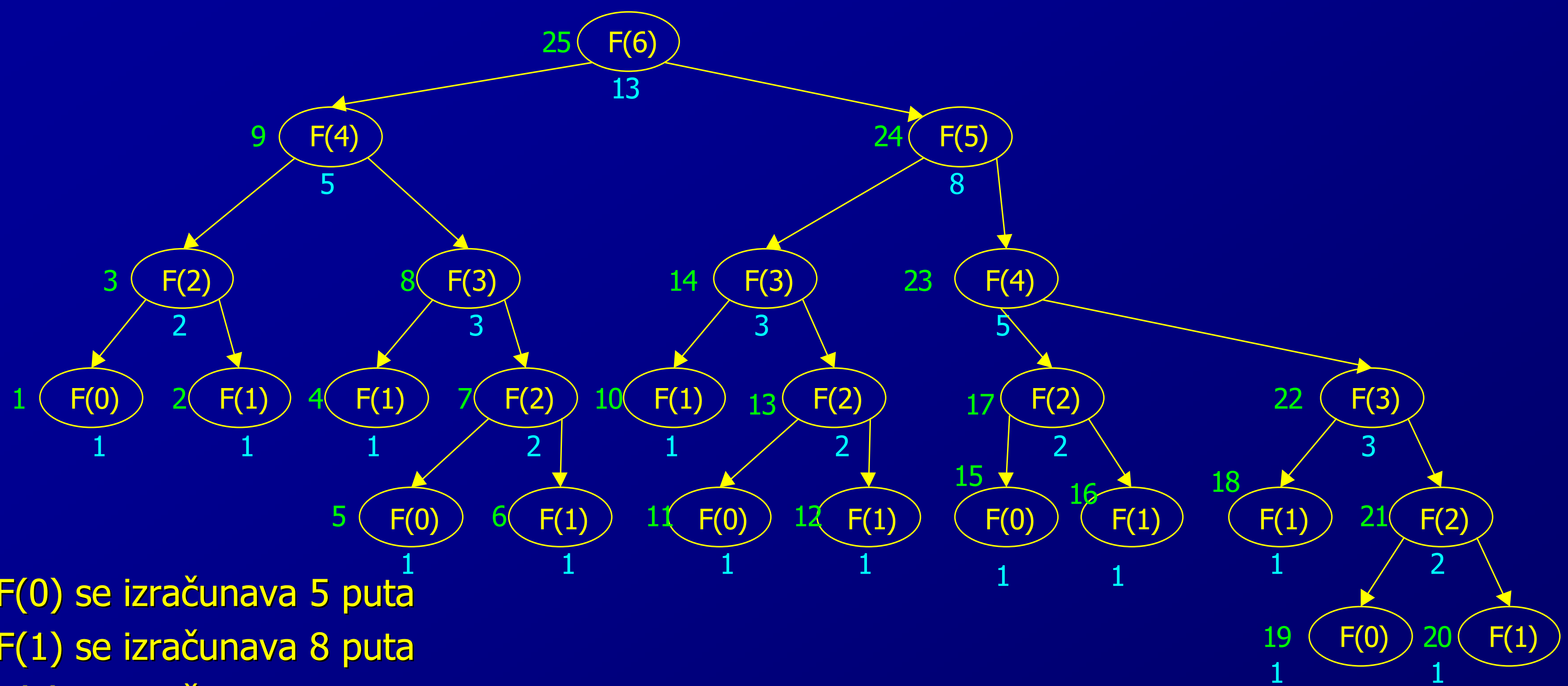
- U 13 stoljeću Leonardo Fibonacci iz Pise se bavio problemom razmnožavanja zečeva
- Problem: svaki par zečeva starih bar 2 mjeseca dobiju par zečića svaki mjesec, pri čemu je jedno dijete mužjak, drugo ženka. Koliko će biti zečeva nakon n mjeseci od jednog para roditelja ?
- Odgovor: broj zečeva se povećava prema ovom nizu 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,...
- $F_0 = F_1 = 1$

  $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}\,;\; n > 1$

```
int F(int n) {
  if (n <= 1)
    return 1;
  else
    return F(n-2) + F(n-1);
}
```

- Program je vrlo kratak i potpuno odgovara matematičkoj definiciji. Efikasnost je vrlo niska.

Fibonaccijevi brojevi



- F(0) se izračunava 5 puta
- F(1) se izračunava 8 puta
- F(2) se izračunava 5 puta
- F(3) se izračunava 3 puta
- F(4) se izračunava 2 puta
- F(5) se izračunava 1 puta
- F(6) se izračunava 1 puta
- Ukupno izračunavanja: 25

Nalaženje najveće zajedničke mjere

- Jedan od najstarijih i najpoznatijih algoritama je Euklidov postupak za pronalaženje **najveće zajedničke mjere** (*nzm*) dva prirodna (nenegativna) cijela broja:

```
1. Ako je a < b zamijeni a i b
2. r = a % b (a mod b, ostatak dijeljenja a s b)
3. a = b i b = r
4. Ako je r različit od 0 idi na 2
5. Vrati a
```

- Primjer:

```
nzm(22,8) = nzm(8,6) = nzm(6,2) = nzm(2,0) = 2
nzm(21,13)=nzm(13,8)=nzm(8,5)=nzm(5,3)=nzm(3,2)=nzm(2,1)=nzm(1,0) =
  1
```

- Rekurzivna funkcija:

```
int nzm (int a, int b) {
  if(b == 0) return a;
  return nzm (b, a % b);
}
```

Traženje člana polja

- Rekurzivni postupak za traženje indeksa prvog člana jednodimenzionalnog polja od `n` članova koji ima vrijednost `x`. Ako takvoga nema, rezultat je -1.

```
int trazi (tip A[], tip x, int n, int i) {
  if(i >= n) return -1;
  if(A[i] == x) return i;
  return trazi (A, x, n, i+1);
}
```

- Pretraživanje počinje pozivom funkcije `trazi(A, x, n, 0).`
- Pretraživanje je brže ako se prethodno u polje prošireno za jedan član stavi tzv. ograničivač `A[n] = x;`

```
int trazi1 (tip A[], tip x, int i){
  if(A[i] == x)  return i;
  return trazi1 (A, x, i+1)
}
```

- Poziv: `tip i; A[n] = x; if ((i = trazi1 (A, x, 0)) == n) ...`
- Primjer: `A=[1,2,3,4,5] ,              x=3 ;  x=7`

```
                           i=0,1,2 vraća 2 ; i=0,1,2,3,4 vraća -1
A=[1,2,3,4,5,7]          i=0,1,2 vraća 2 ; i=0,1,2,3,4,5 vraća 5
```

Traženje najvećeg člana polja

- Određivanje indeksa najvećeg člana u polju od `n` članova

```
int maxclan (int A[], int i, int n) {
  int imax;
  if (i >= n-1) return n-1;
  imax = maxclan (A, i + 1, n);
  if (A[i] > A[imax]) return i;
  return imax;}
```

- Primjer: `A=[2,5,9,1,3]`

```
                    i = 0, 1, 2, 3, 4
                 imax = 2
                           2
                              2
                                 4
                                    4
```

Nije zadovoljen princip strukturiranog programiranja da iz nekog modula vodi samo jedan izlaz. Strukturirana verzija koda je:

```
int maxclan1 (int A[], int i, int n) {
  int imax, ret;
  if (i >= n-1) {
   ret = n-1;
  } else {
    imax = maxclan1 (A, i + 1, n);
    if (A[i] > A[imax]) ret = i;
   else ret = imax;}
  return ret;}
```

Karakteristike rekurzije

- *Osnovni slučajevi:* uvijek moraju postojati osnovni slučajevi koji se rješavaju bez rekurzije
- *Napredovanje:* Za slučajeve koji se rješavaju rekurzivno, svaki sljedeći rekurzivni poziv mora biti približavanje osnovnim slučajevima.
- *Pravilo projektiranja:* Podrazumijeva se da svaki rekurzivni poziv funkcionira.
- *Pravilo ne ponavljanja:* Ne valja dopustiti da se isti problem rješava odvojenim rekurzivnim pozivima. (To rezultira umnažanjem posla, vidi npr. Fibonaccijevi brojevi).
  - Primjer za pogrešku

```
int los (int n) {
  if (n == 0) return 0;
  return los (n / 3 + 1) + n - 1;
}
```

  - Pogreška jest u tome što za vrijednost `n = 1` rekurzivni poziv je opet s argumentom `1`, znači nema napredovanja prema osnovnom slučaju. Program međutim ne radi niti za druge vrijednosti argumenta. Npr. za `n = 4`, rekurzivno se poziva `los` s argumentom `4/3 +1 = 2`, zatim `2/3 +1 = 1` i dalje stalno `1/3 +1 = 1`.

Uklanjanje rekurzije

- Prednosti rekurzije:
  - koncizniji opis algoritma
  - lakše je dokazati korektnost
- Nedostatci:
  - uvećano vrijeme izvođenja (najčešće)
  - neki jezici ne podržavaju rekurziju

- Formalna pravila za uklanjanje rekurzije:

1. Na početku funkcije umetne se deklaracija stoga, inicijalno praznog. Stog služi za pohranu svih podataka vezanih uz rekurzivni poziv: argumenata, vrijednosti funkcije, povratne adrese
2. Prva izvršna naredba dobije oznaku `L1`.

- Svaki rekurzivni poziv zamijenjen je naredbama koje obavljaju sljedeće:

3. Pohrani na stog vrijednosti svih argumenata i lokalnih varijabli.
4. Kreiraj `i`-tu novu oznaku naredbe `Li` i pohrani `i` na stog. Vrijednost `i` će se koristiti za izračun povratne adrese. U pravilu 7. je opisano gdje se u programu smješta ta oznaka.

5. Izračunaj vrijednosti argumenata ovog poziva i pridruži ih odgovarajućim formalnim argumentima.
6. Umetni bezuvjetni skok na početak funkcije.
7. Oznaku kreiranu u točki 4. pridruži naredbi koja uzima vrijednost funkcije s vrha stoga. Dodaj programski kod koji tu vrijednost koristi na način opisan rekurzijom.

- Ovime su uklonjeni svi rekurzivni pozivi. Umjesto svake naredbe return dolazi:

8. Ako je stog prazan, obavi normalnu naredbu `return`.
9. Inače, uzmi vrijednosti svih izlaznih argumenata i stavi ih na vrh stoga.
10. Odstrani sa stoga povratnu adresu ako je bila stavljena, i pohrani je u neku varijablu.
11. Uzmi sa stoga vrijednosti za sve lokalne varijable i argumente.
12. Umetni naredbe za izračun izraza koji slijedi neposredno iza naredbe `return` i pohrani rezultat na stog.
13. Idi na naredbu s oznakom povratne adrese.

- Primjer: Uklanjanje rekurzije iz strukturiranog programa za traženje indeksa najvećeg člana u polju

- pri tom je početni kod promijenjen u:

```
if (i < n-1) {
  imax = maxclan (A, i + 1, n);
  if (A[i] > A[imax])
          return i;
        else
          return imax;
  } else {
    return n-1;
  }

int maxclan2 (int A[], int i, int n) {
  int imax, k, adresa, vrh, *stog;

  vrh = -1;                                          //Pravilo 1
  stog = (int *) malloc (2 * n * sizeof(int));
L1:                                 //Pravilo 2
  if (i < n-1) {
    vrh++; stog[vrh] = i;                 //Pravilo 3
    vrh++; stog[vrh] = 2;                 //Pravilo 4
    i++;                                         //Pravilo 5
    goto L1;                                         //Pravilo 6
```

```
L2:
                                        //Pravilo  7
    imax = stog[vrh]; vrh--;
    if (A[i] > A[imax]) {
      k = i;
    } else {
      k = imax;
    }
  } else {
    k = n-1;
  }

  if (vrh == -1) {              //Pravilo  8
    free (stog);
    return k;

  } else {                      //Pravilo 9
    adresa = stog[vrh]; vrh--;          //Pravilo 10
    i = stog[vrh]; vrh--;                               //Pravilo 11
    vrh++; stog[vrh] = k;                               //Pravilo 12
    if (adresa == 2) goto L2;                   //Pravilo 13
  }
}
```

- Uklanjanje rekurzije je moguće obaviti i na jednostavniji način, poznavanjem i razumijevanjem rada rekurzivne funkcije
- Jednostavno je smisliti algoritam i napraviti kod koji isti problem rješava iterativnim postupkom:

```
int maxclan3 (int A[], int n) {
  int i, imax;
  i = n-1;
  imax = n-1;          // zadnji je najveći
  while (i > 0) {
      i--;
      if (A[i] > A[imax]) imax = i;       }
  return imax;
}

int maxclan4 (int A[], int n) {
  int i, imax = 0;                              // prvi je najveći
  for (i = 1; i < n; i++)
      if (A[i] > A[imax])
              imax = i;
  return imax;
}
```

ANALIZA SLOŽENOSTI ALGORITAMA

Pojam algoritma

- Algoritam je striktno definirani postupak koji daje rješenje nekog problema
- Nastao u matematici, danas se često koristi u računarstvu
- D. E. Knuth je naveo 5 svojstava koje algoritam mora zadovoljavati:

1) konačnost – mora završiti nakon konačnog broja koraka; algoritam mora biti opisan pomoću konačnog broja operacija od kojih svaka mora biti konačne duljine

2) definitnost – svaki korak algoritma mora sadržavati nedvosmislene, rigorozno definirane operacije

3) ulaz – mora imati 0 ili više ulaza

4) izlaz – mora imati 1 ili više izlaza

5) efektivnost – mora biti takav da se može izvesti samo uz pomoć olovke i papira u konačno vrijeme

- Algoritam je postupak za rješavanje masovnog problema
- Masovni problem je općenito pitanje na koje je potrebno naći odgovor, a koje ima parametre koji kod zadavanja problema ostaju neodređeni

- Pri definiciji masovnog problema potrebno je zadati

  1) generalni opis svih parametara

  2) ograničenja koja rješenje masovnog problema mora zadovoljavati
- Specificiranjem svih parametara masovnog problema dobiva se instanca problema
- Algoritam rješava masovni problem ako daje rješenje za svaku pojedinu instancu problema

Složenost algoritama

- Za rješavanje istog problema se mogu naći različiti algoritmi
- Pitanje: koji koristiti ?
- Potrebno je odrediti mjeru kakvoće algoritama da bi se pri izboru algoritma moglo odrediti koji je bolji
- Mjeri se količina resursa koje algoritam treba da bi riješio problem
- Dvije mjere koje se najčešće koriste su **vrijeme** potrebno za izvršenje algoritma i **prostor** potreban za pohranjivanje ulaznih podataka, međurezultata i izlaznih rezultata
- Vremenska i prostorna složenost algoritma
- Mi ćemo se pozabaviti samo vremenskom složenošću algoritama (češće se koristi u ocjenjivanju kakvoće algoritma)
- Prvi problem kod određivanja vremenske složenosti algoritma je pronalaženje mjere koja ne ovisi o brzini računala na kojem se algoritam izvodi, već samo o samom algoritmu
- Zato se vremenska složenost algoritma ne izražava vremenom potrebnim da algoritam izračuna rezultat, već brojem elementarnih operacija koje algoritam mora izvesti u izračunu

- Svrha: predviđanje vremena izračuna i pronalaženje efikasnijih algoritama
- Pretpostavke: fiksno vrijeme dohvata sadržaja memorijske lokacije, vrijeme obavljanja elementarnih operacija (aritmetičke, logičke, pridruživanje, poziv funkcije) je ograničeno nekom konstantom kao gornjom granicom
- Broj operacija koje algoritam izvodi ovisi o veličini ulaza
- Instance problema različitih dimenzija zahtijevaju različiti broj operacija
- No složenost algoritma nije funkcija samo veličine ulaza, mogu postojati različite instance iste duljine ulaza, ali različitih složenosti (različite vrijednosti ulaza)
- Izbor skupova podataka za iscrpno testiranje algoritma:
  - Najbolji slučaj
  - Najgori slučaj: najčešće se koristi ova ocjena
  - Prosječan slučaj: matematičko očekivanje ,najispravniji pristup, ali najsloženija analiza
- Točan račun složenosti se ne isplati, traži se aproksimativna jednostavna funkcija koja opisuje kako se složenost algoritma mijenja s veličinom ulaza
- *A priori* analiza daje trajanje izvođenja algoritma kao vrijednost funkcije nekih relevantnih argumenata.
- *A posteriori* analiza je statistika dobivena mjerenjem na računalu.

Analiza a priori

- *A priori*: procjena vremena izvođenja, nezavisno od računala, programskog jezika, prevoditelja (*compiler*)
- Ako se promatra algoritam koji sortira niz brojeva, tada se njegovo vrijeme izvršavanja izražava u obliku T(n) gdje je n duljina niza
- Ako se promatra algoritam za invertiranje matrice, tada se vrijeme izvršavanja izražava kao T(n) gdje je n red matrice

- Primjeri:

a)
```
x += y;
```
1

b)
```
for(i = 1; i <= n; i++) {
  x += y;
}
```
n

c)
```
for(i = 1; i <= n; i++) {
  for(j = 1; j <= n; j++) {
    x += y;
  }
}
```
n^2

Funkcija složenosti algoritma

- Uvodi se notacija koja jednostavno opisuje brzinu rasta složenosti algoritma
- Asimptotska ocjena rasta funkcije: pri izračunavanju složenosti aproksimacija se vrši tako da aproksimativna funkcija koja je jednostavnija od same funkcije složenosti, dobro asimptotski opisuje rast funkcije složenosti
- Za male n aproksimacija ne mora vrijediti (ali to je nebitno)
- Nas ovdje ne zanima stvarni iznos funkcije složenosti, već samo koliko brzo ta funkcija raste, zanima nas njen red veličine
- Primjer: vrijeme izvršavanja Gaussovog algoritma za invertiranje matrice je proporcionalno s n^3, što znači da ako se red matrice udvostruči, invertiranje može trajati do 8 puta dulje

O-notacija

- $f(n) = O(g(n))$, ako i samo ako postoje dvije pozitivne konstante c i n_0 takve da vrijedi $|f(n)| \leq$ c$|g(n)|$ za sve $n \geq n_0$. Traži se najmanji $g(n)$ za koji to vrijedi.
- Ovo znači da funkcija *f* ne raste brže od funkcije *g*

- Ako je broj izvođenja operacija nekog algoritma ovisan o nekom ulaznom argumentu n oblika polinoma m-tog stupnja, onda je vrijeme izvođenja za taj algoritam $O(n^m)$.
  - Dokaz:

  Ako je vrijeme izvođenja određeno polinomom:

  $A(n) = a_m n^m + \ldots + a_1 n + a_0$

  onda vrijedi:

  $|A(n)| \leq |a_m| n^m + \ldots + |a_1| n + |a_0|$

  $|A(n)| \leq (|a_m| + |a_{m-1}| / n + \ldots + |a_1| / n^{m-1} + |a_0| / n^m)\, n^m$

  $|A(n)| \leq (|a_m| + \ldots + |a_1| + |a_0|)\, n^m$, za svaki $n \geq 1$

  Uz :

  $c = |a_m| + \ldots + |a_1| + |a_0|$ i $n_0 = 1$

  tvrdnja je dokazana.

- Može se kao c koristiti bilo koja konstanta veća od $|a_m|$ ako je n dovoljno velik:
- Ako neki algoritam ima k odsječaka čija vremena su:

$c_1 n^{m1}, c_2 n^{m2}, \ldots, c_k n^{mk}$

onda je ukupno vrijeme

$c_1 n^{m1} + c_2 n^{m2} + \ldots + c_k n^{mk}$

- Znači da je za taj algoritam vrijeme izvođenja jednako $O(n^m)$, gdje je

$m = max\{m_i\}, i = 1,\ldots,k$

Korisno:

1) Ako je $a < b$ onda je n^a raste sporije od n^b
2) Za svaka 2 broja a,b iz skupa cijelih brojeva različita od 1 vrijedi da $\log_a n$ raste jednako brzo kao $\log_b n$ (zato se često baza zanemari i pise se lg n – logaritam po proizvoljnoj bazi)
3) n^a raste sporije od $n^a * \lg n$ raste sporije od n^{a+1} ; iz ovoga slijedi da logaritmi asimptotski rastu sporije od linearne funkcije
4) a,b cijeli brojevi različiti od 1, za $a < b$ vrijedi da n^a raste sporije od b^n ; iz ovoga slijedi da eksponencijalna funkcija raste brže od bilo koje polinomne funkcije
5) a,b cijeli brojevi različiti od 1, za $a < b$ vrijedi da a^n raste sporije od b^n

- Dakle, za dovoljno veliki n vrijedi:

$O(1) < O(\log n) < O(n) < O(n\log n) < O(n^2) < O(n^3) < \ldots < O(2^n)$

- $O(1)$ znači da je vrijeme izvođenja ograničeno konstantom.
- Ostale vrijednosti, osim zadnje, predstavljaju *polinomna* vremena izvođenja algoritma. Svako sljedeće vrijeme izvođenja je veće za *red veličine*.
- Zadnji izraz predstavlja *eksponencijalno* vrijeme izvođenja. Ne postoji polinom koji bi ga mogao ograničiti jer za dovoljno veliki n ova funkcija premašuje bilo koji polinom.
- Algoritmi koji zahtijevaju eksponencijalno vrijeme mogu biti nerješivi u razumnom vremenu, bez obzira na brzinu slijednog računala.

- *Donja granica* za vrijeme izvođenja algoritma $f(n) = \Omega(g(n))$, ako i samo ako postoje dvije pozitivne konstante c i n_0 takve da vrijedi $|f(n)| \geq c\,|g(n)|$ za sve $n > n_0$. Traži se najveći $g(n)$ za koji to vrijedi. Funkcija f ne raste sporije od funkcije g.
- Ukoliko su gornja i donja granica *jednake* ($O = \Omega$), koristi se notacija:

$f(n) = \Theta(g(n))$ ako i samo ako postoje pozitivne konstante c_1, c_2 i n_0 takve da vrijedi $c_1|g(n)| \leq |f(n)| \leq c_2|g(n)|$ za sve $n > n_0$. Funkcije f i g rastu jednako brzo.

- $f(n) = o(g(n))$, ako i samo ako postoje dvije pozitivne konstante c i n_0 takve da vrijedi $|f(n)| < c|g(n)|$ za sve $n \geq n_0$. *Funkcija f raste sporije od funkcije g.*
- $f(n) = \omega(g(n))$, ako i samo ako postoje dvije pozitivne konstante c i n_0 takve da vrijedi $|f(n)| > c|g(n)|$ za sve $n \geq n_0$. Funkcija f raste brže od funkcije g.

- primjer: traženje najvećeg člana u polju

```
int maxclan (int A[], int n) {
    int i, imax;
    i = n-1; imax = n-1;
     while (i > 0) {
      i--;
      if (A[i] > A[imax]) imax = i;}
    return imax;}
```

petlja se uvijek obavi n-1 puta →

$$\Omega(n) = O(n) = \Theta(n)$$

- Primjer: traženje člana u polju

```
int trazi (int A[], int x, int n, int i) {    // A-polje x-trazeni i-indeks od kojeg se trazi
    int ret;
    if (i >= n) ret = -1;
    else if (A[i] == x) ret = i;
    else ret = trazi (A, x, n, i+1);
  return ret;}
```

- vrijeme izvođenja je $O(n)$, ali je donja granica $\Omega(1)$. U najboljm slučaju u prvom koraku nađe traženi član polja, a u najgorem mora pregledati sve članove polja.

- Primjer: složenost Euklidovog algoritma u najgorem slučaju

```
1. Ako je a < b zamijeni a i b
2. r = a % b (a mod b, ostatak dijeljenja a s b)
3. a = b i b = r
4. Ako je r različit od 0 idi na 2
5. Vrati a
```

- Koraci od 2 – 4 čine petlju koja se izvršava najviše b puta (ostatak od dijeljenja je uvijek manji od djelitelja, pa je r uvijek manji od b što znači da se b uvijek smanjuje bar za 1, pa će b =0 biti ispunjeno nakon najviše b koraka)
- Izvršavanje petlje traje konstantno vrijeme c_1, posljednji korak se izvodi jednom i njegova složenost neka je c_2
- Duljina ulaza n se definira kao duljina manjeg od ulaznih brojeva, pa slijedi

$$T^{Euklid}_{max}(n) = c_1 * n + c_2 \quad \text{tj.}$$

$$T^{Euklid}_{max}(n) = \Theta(n)$$

Asimptotsko vrijeme izvođenja

- *Asimptotsko vrijeme izvođenja* je $f(n) \sim \Theta(g(n))$ (čita se: "$f(n)$ je asimptotsko funkciji $g(n)$") ako je

  $$\lim_{n \to \infty} f(n)/g(n) = 1$$

  - Precizniji je opis vremena izvođenja nego O-notacijom. Zna se i red veličine vodećeg člana i konstanta koja ga množi.

  Ako je na primjer

  $f(n) = a_k n^k + \ldots + a_0$

  tada

  $f(n) = O(n^k)$

  i

  $f(n) \sim \Theta(a_k n^k)$

- U izračunu učestalosti obavljanja nekih naredbi često se javljaju sume oblika:

$$\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2 = O(n^2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = n(n+1)\,(2n+1)/6 = O(n^3)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = n^{k+1}/(k+1) + n^k/2 + \text{članovi nižeg reda} \qquad = O(n^{k+1})$$

$$\sim \Theta(\, n^{k+1}/(k+1))$$

Primjer: izračun vrijednosti polinoma u zadanoj točki

- Polinom n-tog stupnja je funkcija oblika (x je realan broj)

  $$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

- Najočitiji i najjednostavniji algoritam za izračunavanje vrijednosti polinoma

  1) $i = 0$; $p = 0$
  2) $p = p + a_i x^i$
  3) $i = i + 1$
  4) ako je $i \leq n$ idi na 2
  5) vrati p

- Odredimo broj računskih operacija u izvođenju ovog algoritma
  - n+1 povećavanje brojača i (zbrajanje)
  - Koraci 2–4 se izvode n+1 puta, u svakom koraku 1 zbrajanje, 1 množenje i 1 potenciranje. Potenciranje odgovara nizu uzastopnih množenja. Za i>1 to znači i-1 množenje, što ukupno daje broj množenja

    $$\sum_{i=1}^{n-1} i = (n - 1) * n / 2$$

  Zajedno je to n+1 zbrajanje i n+1 + (n-1)*n/2 množenja

- Primijetimo: u koraku 2 se izračunavaju sve veće potencije istog broja x. Svaka sljedeća potencija se može izračunati množenjem prethodne s x, čime se znatno smanjuje ukupan broj množenja
- Prepravljeni (brži) algoritam:

  1) i = 0 ; p = 0 ; y = 1

  2) p = p + a_i * y

  3) i = i + 1 ; y = y * x

  4) ako je i ≤ n idi na 2

  5) vrati p
- Broj operacija u ovom algoritmu:

  \- n + 1 povećanje brojača (zbrajanje)

  \- koraci 2-4 se izvode n+1 puta, u svakom koraku 1 zbrajanje, 2 množenja, što daje zajedno n+1 zbrajanje i 2*(n+1) množenja

- Ovo je bitno brži algoritam od prvotnog. Postoji li još brži ? Da.

Hornerov algoritam:

- izluči li se u izrazu za polinom iz prvih n pribrojnika x

$$P_n(x) = (a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + a_1) x + a_0$$

Ponovi li se postupak još n-2 puta dobiva se izraz:

$$P_n(x) = ((\ldots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \ldots + a_2)x + a_1)x + a_0$$

- Algoritam koji koristi gornji izraz:

  1) $i = n - 1$; $p = a_n$

  2) $p = p * x + a_i$

  3) $i = i - 1$

  4) ako je $i \geq 0$ idi na 2

  5) vrati p

- Broj operacija u algoritmu:

  - n smanjenja brojača (n oduzimanja = zbrajanja)

  - korake 2-4 prolazi n puta, u svakom koraku 1 zbrajanje i 1 množenje, što je ukupno n zbrajanja i n množenja

- Bitno je brži od oba prethodna algoritma, naročito prvog koji je $O(n^2)$, od drugog je dvostruko brži

Primjer za različite složenosti istog problema

- Zadano je polje cijelih brojeva A_0, A_1,…,A_{n-1}. Brojevi mogu biti i negativni. Potrebno je pronaći najveću vrijednost sume niza brojeva. Pretpostavit će se da je najveća suma 0 ako su svi brojevi negativni.

- Kubna složenost: Ispituju se svi mogući podnizovi. U vanjskoj petlji se varira prvi član podniza od nultog do zadnjeg. U srednjoj petlji varira se zadnji član podniza od prvog člana do zadnjega člana polja. U unutrašnjoj petlji varira se duljina niza od prvog člana do zadnjeg člana. Sve 3 petlje se za najgori slučaj obavljaju n puta. Zbog toga je apriorna složenost $O(n^3)$.

```
int MaxPodSumaNiza3 (int A[], int N) {
    int OvaSuma, MaxSuma, i, j, k;
    int iteracija = 0;
    MaxSuma = 0;
    for (i = 0; i < N; i++) {
      for (j = i; j < N; j++) {
            OvaSuma = 0;
            for (k = i; k <= j; k++) {
                  OvaSuma += A [k];
                  ++iteracija; }
            if (OvaSuma > MaxSuma)
                  MaxSuma = OvaSuma;}
    } return MaxSuma; }
```

- Kvadratna složenost: ako uočimo da vrijedi:

$$\sum_{k=i}^{j} A_k = A_j + \sum_{k=i}^{j-1} A_k$$

složenost se može reducirati uklanjanjem jedne petlje. Složenost ovog algoritma je $O(n^2)$.

```
int MaxPodSumaNiza2 (int A[ ], int N) {
    int OvaSuma, MaxSuma, i, j;
    int iteracija = 0;
    MaxSuma = 0;
    for (i = 0; i < N; i++) {
      OvaSuma = 0;
      for (j = i; j < N; j++) {
                OvaSuma += A[ j ];
                ++iteracija;
                if (OvaSuma > MaxSuma)
                          MaxSuma = OvaSuma; }
    } return MaxSuma;}
```

- Linearna * logaritamska složenost: $O(n\log_2 n)$
  - Relativno složeni rekurzivni postupak. Kad ne bi bilo i boljeg (linearnog) rješenja, ovo bi bio dobar primjer snage rekurzije i postupka podijeli-pa-vladaj (*divide-and-conquer*). Ako se ulazno polje podijeli približno po sredini, rješenje može biti takvo da je maksimalna suma u lijevom dijelu polja, ili je u desnom dijelu polja ili prolazi kroz oba dijela. Prva dva slučaja mogu biti riješena rekurzivno. Zadnji slučaj se može realizirati tako da se nađe najveća suma u lijevom dijelu koja uključuje njegov zadnji član i najveća suma u desnom dijelu koja uključuje njegov prvi član. Te se dvije sume zbroje i uspoređuju s one prve dvije. Na primjer:

Lijevi dio | Desni dio

4	-3	5	-2	-1	2	6	-2
0	1	2	3	4	5	6	7

Najveća lijeva suma je od članova 0 do 2 i iznosi 6. Najveća desna suma je od članova 5 do 6 i iznosi 8. Najveća lijeva suma koja uključuje zadnji član na lijevo je od 0 do 3 člana i iznosi 4, a najveća desno koja uključuje prvi član na desno od 4 do 6 člana i iznosi 7. Ukupno to daje sumu 11 koja je onda i najveća.

Pozivni program za početne rubove zadaje 0 i n-1.

```
int Max3 (int A, int B, int C) { // racuna najveci od 3 broja: X > Y ? X : Y, A > B ? max(A,C) : max(B,C)
    return A > B ? A > C ? A : C : B > C ? B : C;
}

int MaxPodSuma (int A[], int Lijeva, int Desna, int dubina) { // trazi najvecu podsumu slijeva nadesno
    int MaxLijevaSuma, MaxDesnaSuma;
    int MaxLijevaRubnaSuma, MaxDesnaRubnaSuma;
    int LijevaRubnaSuma, DesnaRubnaSuma;
    int Sredina, i, ret;

    if (Lijeva == Desna) { // Osnovni slucaj
      if (A [Lijeva] > 0)
            ret = A [Lijeva]; // podniz od clana A[Lijeva]
      else
            ret = 0; // suma je 0 ako su svi brojevi negativni
    return ret; }
    // racun lijeve i desne podsume s obzirom na Sredina
    Sredina = (Lijeva + Desna) / 2;
    MaxLijevaSuma = MaxPodSuma (A, Lijeva, Sredina, dubina+1);
    MaxDesnaSuma = MaxPodSuma (A,Sredina + 1, Desna, dubina+1);
```

```
// najveca gledano ulijevo od sredine
    MaxLijevaRubnaSuma = 0; LijevaRubnaSuma = 0;
    for (i = Sredina; i >= Lijeva; i--) {
          LijevaRubnaSuma += A [i];
          if (LijevaRubnaSuma > MaxLijevaRubnaSuma)
                    MaxLijevaRubnaSuma = LijevaRubnaSuma;       }
// najveca gledano udesno od sredine
  MaxDesnaRubnaSuma = 0; DesnaRubnaSuma = 0;
  for (i = Sredina + 1; i <= Desna; i++) {
   DesnaRubnaSuma += A [i];
   if (DesnaRubnaSuma > MaxDesnaRubnaSuma)
         MaxDesnaRubnaSuma = DesnaRubnaSuma;  }
// najveca od lijeva, desna, rubna
  ret = Max3 (MaxLijevaSuma, MaxDesnaSuma,
                 MaxLijevaRubnaSuma + MaxDesnaRubnaSuma);
    return ret;}

// NlogN slozenost
int MaxPodSumaNizaLog (int A [], int N) {
    return MaxPodSuma (A, 0, N - 1, 0);}
```

- Programski kod je relativno složen, ali daje za red veličine bolje rezultate od prethodnoga.
- Ako bi n bio potencija od 2 intuitivno se vidi da će sukcesivnih raspolavljanja biti $log_2 n$. Kroz postupak prolazi n podataka, pa imamo $O(n \, log_2 n)$.
- Općenito se može reći da je trajanje algoritma $O(log_2 n)$ ako u vremenu $O(1)$ podijeli veličinu problema (obično ga raspolovi).
- Ako u pojedinom koraku reducira problem za 1, onda je njegovo trajanje $O(n)$.

- Linearna složenost: zbrajaju se svi članovi polja redom, a pamti se ona suma koja je u cijelom tijeku tog postupka bila najveća, pa je složenost algoritma *O(n)*

```
int  MaxPodSumaNiza1 (int A[], int N) {
    int OvaSuma, MaxSuma, j;
    OvaSuma = MaxSuma = 0;
    for (j = 0; j < N; j++) {
        OvaSuma += A[ j ];
        if (OvaSuma > MaxSuma)
                MaxSuma = OvaSuma;
        else if (OvaSuma < 0)
                OvaSuma = 0;        // povecanje izgleda sljedeceg podniza
    }  return MaxSuma;}
```

Analiza a posteriori

- Stvarno vrijeme potrebno za izvođenje algoritma na konkretnom računalu.

`#include <sys\timeb.h>` gdje je deklarirano

```
struct timeb {
   time_t time; // broj sekundi od ponoći, 01.01.1970 prema UTC
   unsigned short millitm; // milisekunde
   short timezone; // razlika u minutama od UTC
   short dstflag; // <>0 ako je na snazi ljetno računanje vremena
};
void ftime(struct timeb *timeptr);
```

- U programu:

```
struct timeb vrijeme1, vrijeme2; long trajanjems;
ftime (&vrijeme1);
...
ftime (&vrijeme2);
trajanjems = 1000 * (vrijeme2.time - vrijeme1.time) +
               vrijeme2.millitm - vrijeme1.millitm;
```

- *coordinated universal time (UTC):* novi naziv za *Greenwich Mean time (GMT)*